Θέματα επιχειρησιακών ερευνών

Περίπτωση Δυναμικού προγραμματισμού

A. Wanger Within (1958) ← καλός !

Έχω πεπερασμένο ορίζοντα, δηλαδή ένα χρονικό διάστημα που μπορώ να δουλέψω κάθε φορά πα παραγγέλνω πράγματα (: κόστος). Να ελαχιστοποιήσω το κόστος της ζήτησης με βάση τα πράγματα που ήδη έχω.

1. Ορίζοντας λειτουργίας του συστήματος (ορίζοντας σχεδιασμού) είναι πεπερασμένος και αποτελείται από περιόδους ίσου μήκους.
2. Η ζήτηση είναι προσδιοριστική, αλλά μεταβάλλεται από περίοδο σε περίοδο και συμβαίνει πάντα από την αρχή της περιόδου.
3. καμιά παραγγελία δεν προγραμματίζεται να ληφθεί στην αρχή μιας περιόδου της οποίας η ζήτηση είναι μηδέν.
4. Ο χρόνος αναμονής (lead time) θεωρείται μηδενική.
5. Όλη η ποσότητα παραγγελίας παραλαμβάνονται την ίδια στιγμή στην αρχή της περιόδου n, δεν επιτρέπεται διάσπαση της παραγγελίας.
6. Κόστος διατήρησης χρεώνεται στο διαθέσιμο απόθεμα στο τέλος της περιόδου.
7. Δεν επιτρέπονται εκκρεμείς παραγγελίες.
8. Το κόστος παραγγελίας είναι σταθερό σε κάθε περίοδο n, ανεξάρτητο από το μέγεθος της παραγγελίας.

Πολιτική Παραγγελιών: συνίσταται στον καθορισμό μιας ή περισσότερων ακέραιων χρονικών περιόδων ικανοποίησης της ζήτησης που θα γίνει με τη χρονολογική σειρά παρουσίασης της ζήτησης.

Επίσης το M μπορεί να είναι
(*) το σύνολο της ζήτησης από I και μετά

°° Σχόλιο!

Τι λέει το πρόβλημα

$D_1 \quad D_2 \quad \ldots \quad D_N$

$1 \quad 2 \quad 3 \quad \ldots \quad N$

D_i = ζήτηση $i = 1, \ldots N$

$D_i \neq D_j$ $\forall$ περίοδο

όλη την ποσότητα την παραγγέλνω μαζί. το σύστημα δεν έχει πιθανότητες

κόστος → παραγγελίας

→ αποθέματος, εξαρτάται από τη δέσμευση του κεφαλαίου

N: ορίζοντας σχεδιασμού

C: κόστος παραγγελίας

H = PF : κόστος διατήρησης ανά μονάδα διατηρούμενου αποθέματος

F: ποσοστό της τιμής αγοράς P

D_i: η ζήτηση την i περίοδο

I_i: διαθέσιμο απόθεμα στο τέλος της περιόδου i

Q_i: ποσότητα παραγγελίας της περιόδου i.

Θα το μοντελοποιήσουμε με βάση τον ακέραιο προγραμματισμό

Ορίζω $f(Q_i) = \begin{cases} 1, & \text{αν } Q_i > 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

$$\min \sum_{i=1}^{N} C f(Q_i) + H I_i$$

όπου $I_{i-1} + Q_i - D_i = I_i \quad , i = 1, \ldots N$

$Q_i \leq \boxed{M} f(Q_i) \quad , i = 1, N$

$Q_i \geq 0$

$I_i \geq 0$

$I_0 = I_N = 0$

για να πάρω την ποσότητα που θέλω πρέπει να την παραγγείλω

°° Σχόλιο!

(*) είναι ένας μεγάλος αριθμός. Το σύνολο της ζήτησης

°° Σχόλιο!

Πρόβλημα: Ποιες χρονικές στιγμές θα κάνω παραγγελία για να καλύψω την ζήτηση των περιόδων.

°° Παρατήρηση!

Μια βέλτιστη λύση αν ικανοποιεί τις εξής 2 ιδιότητες

1. $Q_i I_{i-1} = 0$
2. Η παραγγελία που τίθεται σε μια περίοδο πρέπει να καλύπτει τη ζήτηση για ακέραιο αριθμό περιόδων.

1. Z_{ce}: συνολικό κόστος των περιόδων αν τεθεί μια παραγγελία για την περίοδο c, η οποία ικανοποιεί τη ζήτηση από την περίοδο c έως την περίοδο e.

$$Z_{ce} = C + H\sum_{i=c}^{e}(Q_{ce}-Q_{ci}) \qquad 1\le c\le e\le N$$

$$Q_{ce}=\sum_{k=c}^{e} D_k$$

2. Υπολογίζουμε το ελάχιστο κόστος από την περίοδο 1 έως την e.
Αναδρομική σχέση: $f_e = \min\{Z_{ce}+f_{c-1}\}$ $c=1,2,\dots e$
$f_0=0$

3. Καθορισμός της βέλτιστης (λύσης) πολιτικής

$$f_N = Z_{wN}+f_{w-1}$$
$$f_{w-1}=Z_{v\,w-1}+f_{v-1}$$
$$\dots$$
$$f_{u-1}=Z_{1\,u-1}+f_0$$

ΑΣΚΗΣΗ ΘΕΜΑ

SOSARA

1η παραγ. — 2η παραγγελία

	1	2	3	4	5	6
ζήτηση	75	0	33	28	0	10

$F=0,2$
$P=5€$ (κόστος αγοράς)
$C=100€$

$\Rightarrow H=PF \Rightarrow H=(0,2)5$
$\Rightarrow H=1$

6

$Z_{11}=100+1(75-75)=100$

$Z_{12}=100+1[(75-75)+(75-(75+0))]=100$

Θα κάνω παραγγελία την 1η περίοδο και θα ικανοποιήσω την ζήτηση της 1ης και 2ης περιόδου

$Z_{13}=100+1[(\underbrace{108}_{75+33}-75)+(108-(75+0))+(108-(75+0+33))]=166$

$$Z14 = 100 + 1[(136-75) + (136-75) + (136-108) + (136-136)] =$$
$$= 250$$
$$Z15 = 100 + 1[(136-75) + (136-75) + (136-75-0-33) +$$
$$+ (136-75-0-28) + (136-136)] = 250$$
$$Z16 = 100 + 1[(146-75) + (146-75) + (146-108) + (146-136) +$$
$$+ (146-136) + (146-146)] = 300$$

$$Z22 = 100 + 1(0-0) = 100$$
$$Z23 = 100 + 1[(33-0) + (33-33)] = 133$$
$$Z24 = 100 + 1[(61-0) + (61-33) + (61-61)] = 189$$
$$Z25 = 100 + 1[(61-0) + (61-33) + (61-61) + (61-61)] =$$
$$= 189$$
$$Z26 = 100 + 1[(71-0) + (71-33) + (71-61) + (71-61)]$$
$$= 229$$

$$Z33 = 100 + 1(33-33) = 100$$
$$Z34 = 100 + 1[(61-33) + (61-61)] = 128$$
$$Z35 = 100 + 1[(61-33) + (61-61) + (61-61)] = 128$$
$$Z36 = 100 + 1[(71-33) + (71-61) + (71-71)] = 158$$

$$Z44 = 100 + 1(28-28) = 0$$
$$Z45 = 100 + 1[(28-28) + (28-28)] = 100$$
$$Z46 = 100 + 1[(38-28) + (38-28) + (38-38)] = 120$$

$$Z55 = 100 + 1(0-0) = 100$$
$$Z56 = 100 + [(10-0) + (10-10)] = 110$$

$$Z66 = 100 + 1(10-10) = 100$$

Z_{ce}

c \ e	1	2	3	4	5	6
1	100	100	166	250	250	300
2		100	133	189	189	229
3			100	128	128	159
4				100	100	120
5					100	110
6						100

$f_0 = 0$

$f_1 = \min\{Z_{11} + f_0\} = 100$ $\quad \underline{Z_{11} + f_0} \rightarrow$ (από που προέρχεται)

$f_2 = \min\{Z_{12} + f_0, Z_{22} + f_1\} = \min\{100+0, 100+100\} = 100$ $\quad \underline{Z_{12} + f_0}$

$f_3 = \min\{Z_{13} + f_0, Z_{23} + f_1, Z_{33} + f_2\}$
$= \min\{166+0, 133+100, 100+100\} = 166$ $\quad \underline{Z_{13} + f_0}$

$f_4 = \min\{Z_{14} + f_0, Z_{24} + f_1, Z_{34} + f_2, Z_{44} + f_3\}$
$= \min\{250+0, 189+100, 128+100, 100+166\}$
$= 228$ $\quad \underline{Z_{34} + f_2}$

$f_5 = \min\{Z_{15} + f_0, Z_{25} + f_1, Z_{35} + f_2, Z_{45} + f_3, Z_{55} + f_4\}$
$= \min\{250+0, 184+100, 128+100, 100+166, 100+228\}$
$= 228$ $\quad \underline{Z_{35} + f_2}$

$f_6 = \min\{Z_{16} + f_0, Z_{26} + f_1, Z_{36} + f_2, Z_{46} + f_3, Z_{56} + f_4, Z_{66} + f_5\}$
$= \min\{300+0, 224+100, 158+100, 120+160, 100+228, 100+228\} = \underbrace{258}$ $\quad \underline{Z_{36} + f_2}$

↳ ελάχιστο κόστος

(προς τα πίσω πάω μόνο για να βρω την πολιτική της παραγγελίας)

°° Σχόλιο !

(Να ελαχιστοποιήσουμε το κόστος παραγγελίας και το κόστος διατήρησης σε μια συγκεκριμένη περίοδο)

°° Σχόλιο !

"fe"

Κοιτάω το ελάχιστο από κάθε στήλη και το προσθέτω στην επόμενη γραμμή

	1	2	3	4	5	6
1	100	$\boxed{100}$	$\boxed{166}$	250	250	300
2		200	233	289	289	329
3			200	228	228	258
4				266	266	286
5					328	338
6						328

τελευταία παραγγελία

Είναι το ελάχιστο της 3ης στήλης και το προσθέτω στην 4η γραμμή.

Επιλέγω το ελάχιστο από την τελευταία στήλη

□

B. Silver Meal (1973) Least Period Cost

B1
$$\frac{Tc(k-1)}{k-1} \geq \frac{Tc(k)}{k} < \frac{Tc(k+1)}{k+1}, \quad k \leq N$$

$$\frac{Tc(k)}{k} = \frac{C + \text{συνολικό κόστος διατήρησης μέχρι την περίοδο } k}{k}$$

$$= \frac{C + H \sum_{i=1}^{k} (i-1) D_i}{k}$$

$\boxed{\text{μονάδα χρόνου}}$

σχέση κυρτότητας

σσ Σχόλιο

ΑΣΚΗΣΗ

Η ίδια άσκηση με την προηγούμενη. Απλά θα αλλάξω τον αλγόριθμο που θα χρησιμοποιήσω.

περίοδος	k	D_i	$H(k-1)D_k$	$\sum_{i=1}^{k} H(i-1)D_i$	$C+H\sum(i-1)D_i$	(*)
1	1	75	$5\cdot(0,2)\,0\,75=0$	0	100	100
2	2	0	0	0	100	50
3	3	33	$5(0,2)2\cdot 33=66$	66	166	55.33
3	1	33	$5(0,2)\cdot 0\cdot 33=0$	0	100	100
4	2	28	$5(0,2)\cdot 1\cdot 28=28$	28	128	64
5	3	0	0	28	128	42.67
6	4	10	$5(0,2)\cdot 3\cdot 10=30$	58	158	39.5

$$(*) = \frac{C+H\sum_{i=1}^{k}(i-1)D_i}{k}$$

□

Bα Αντί για την μονάδα του χρόνου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την μονάδα του προϊόντος

$Tc(k) = C +$ συνολικό κόστος διατήρησης μέχρι την περίοδο k.

$$\frac{Tc(k-1)}{\sum_{i=1}^{k-1} D_i} > , \quad \frac{Tc(k)}{\sum_{i=1}^{k} D_i} < \frac{Tc(k+1)}{\sum_{i=1}^{k+1} D_i} , \quad k \leq N$$

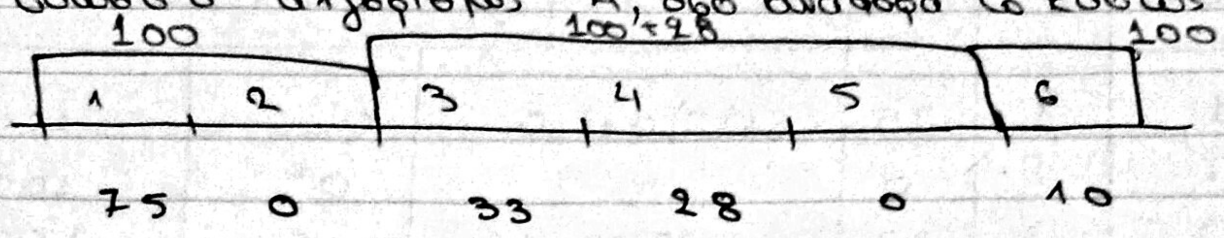
π.χ.

περίοδος	k	D_i	$\sum_1^k D_i$	$H(k-1)D_i$	$\sum_{i=1}^{k} H(i-1)D_i$	$C+H\sum_{i=1}^{k}(i-1)D_i$	$\frac{C+H\sum_1^k (i-1)D_i}{\sum_1^k D_i}$
1	1	75	75	$5(0,2)0\,75=0$	0	100	1,33
2	2	0	75	0	0	100	1,33
3	3	33	108	$5(0,2)2\cdot 33=66$	66	166	1,54
3	1	33	33	0	0	100	3,03
4	2	28	61	28	28	128	2,1
5	3	0	61	28	28	128	2,1
6	4	10	71	$5(0,2)3\,10=30$	58	158	2,22
6	1	10	10	$5(0,2)\,0\,10=0$	0	100	

αυξήθηκε

$1^{η}$ 75 $3^{η}$ 61 $6^{η}$ 10

Χειρότερη λύση σε σχέση με την βέλτιστη που μας έδωσε ο αλγόριθμος Α, όσο αναφορά το κόστος



□

Γ. Part Period Balancing

$$H\sum_{i=1}^{k}(i-1)D_i = C \qquad \sum_{i=1}^{k}(i-1)D_i = \frac{C}{H}$$

$$\frac{C}{PF} = \frac{100}{5(0,2)} = 100$$

τα συγκρίνω

ΑΣΚΗΣΗ

περίοδος	k	$(k-1)D_i$	$\sum_{i=1}^{k}(i-1)D_i$
1	1	0	$0<100$
2	2	10	$0<100$
3	3	$2(33)=66$	$66<100$
4	4	$3\cdot 28=84$	$150>100$ ← Άλλαξε πρόσημο ξεκινάω πάλι από την αρχή
4	1	$0\cdot 2=0$	$0<100$
5	2	$1\cdot 0=0$	$0<100$
6	3	$2\cdot 10=20$	$20<100$

Από 1 έως 3 : 108

Από 4 έως 6 : 38 κόστος 286

↳ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΟ ΚΟΣΤΟΣ ΚΑΙ ΣΕ ΑΥΤΗΝ ΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

□